74. ročník Matematické olympiády – 2024/2025

Úlohy ústředního kola kategorie P – 1. soutěžní den

Na řešení úloh máte 4.5 hodiny čistého času. Řešení každé úlohy pište na samostatný list papíru. Při soutěži je zakázáno používat jakékoliv pomůcky kromě psacích potřeb (tzn. knihy, kalkulačky, mobily, apod.).

Řešení každé úlohy má obsahovat *popis řešení,* to znamená slovní popis principu zvoleného algoritmu, *argumenty zdůvodňující jeho správnost* (případně důkaz správnosti algoritmu), *diskusi o efektivitě* vašeho řešení (časová a paměťová složitost). Není možné odkazovat se na vaše řešení úloh z předchozích kol, opravovatelé je nemusí mít k dispozici.

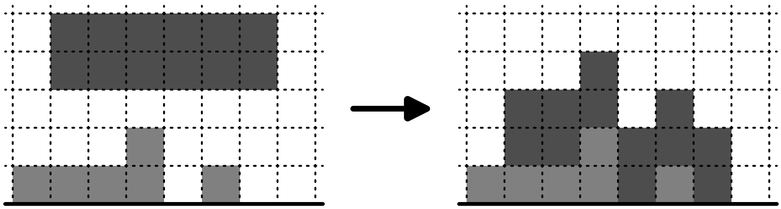
Do řešení nemusíte psát odpovídající program, algoritmus stačí zapsat ve vhodném pseudokódu nebo dokonce jenom slovně, je-li popis dostatečně podrobný a srozumitelný. Nemusíte detailně popisovat jednoduché operace jako vstupy, výstupy, implementaci jednoduchých matematických vztahů, vyhledávání v poli, třídění apod.

Za každou úlohu můžete získat maximálně 10 bodů. Hodnotí se nejen správnost řešení, ale také kvalita jeho popisu a efektivita zvoleného algoritmu. Algoritmy posuzujeme podle jejich časové složitosti, tzn. závislosti doby výpočtu na velikosti vstupních dat. Záleží přitom pouze na řádové rychlosti růstu této funkce. V zadání každé úlohy najdete přibližné limity na velikost vstupních dat. Efektivním vyřešením úlohy rozumíme to, že váš program spuštěný s takovými daty na současném běžném počítači dokončí výpočet během několika sekund.

Zadání naleznete na další straně.

P-III-1 Kreslení

Benův oblíbený kreslicí software právě dostal aktualizaci! Když si Ben procházel nové funkce, nejvíce ho zaujal nástroj „Seslat obdélník“. Ten vytváří oblast pixelů v horní liště, která se následně sesype až na spodek obrázku.



Ben chce tento nástroj využít ve svém příštím uměleckém díle. Jelikož však sypací animaci nelze přeskočit, velmi obtížně se s touto funkcí experimentuje. Požádal vás proto, abyste mu vytvořili program, který jeho vizuální plánování urychlí.

Soutěžní úloha

Obrázek je široký N pixelů a má neomezenou výšku. Na začátku je zcela prázdný. Ben připravil seznam celkem Q instrukcí, které jsou dvou typů:

- Seslat obdélník: vysoko nad dosavadním obrázkem se zjeví obdélník barvy C. Má šířku W, výšku H a levou hranu v X-tém sloupci. Každý pixel následně spadne přímo dolů až na doposud nejvyšší pixel ve svém sloupci.
- Dotaz: jakou barvu má aktuálně pixel v X-tém sloupci a Y-tém řádku (zespodu)?

K dispozici vám dal celý tento seznam, na dotazy tedy *nemusíte* odpovídat okamžitě poté, co je načtete.

Formát vstupu

Na prvním řádku dostanete dvě čísla: šířku obrázku N a počet instrukcí Q ($1 \leq N, Q \leq 10^6$). Na dalších Q řádcích se pak nachází jednotlivé instrukce. Každá začíná písmenem, které určuje její typ, a dále obsahuje čísla oddělená mezerami:

- Pokud jde o písmeno `S`, jedná se o typ „Seslat obdélník“. Následují kladná celá čísla C, X, W a H ($X + W - 1 \leq N$ a $1 \leq C, H \leq 10^9$), popisující obdélník barvy C, s levou hranou v X-tém sloupci, a o rozměrech $W \times H$.
- Pokud jde o písmeno `D`, jedná se o typ „Dotaz“. Následují kladná celá čísla X a Y ($1 \leq X \leq N$ a $1 \leq Y \leq 10^{18}$), udávající souřadnice pixelu, jehož barvu chceme zjistit.

Formát výstupu

Pro každou instrukci typu „Dotaz“ vypište na samostatný řádek jedno číslo jako odpověď, totiž barvu pixelu na souřadnicích $[X, Y]$. Pokud je tento pixel (zatím) prázdný, vypište -1. Ačkoliv dotazy znáte dopředu, zodpovězte je v takovém pořadí, v jakém jste je dostali na vstupu.

Bodování

Pro účely hodnocení vašich řešení předpokládáme, že čísla N a Q jsou zhruba stejně velká. Nezáleží tedy na tom, na které z těchto proměnných složitost závisí.

- Plný počet bodů může získat řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(Q \log Q)$, tedy efektivní i pro $N, Q \leq 10^6$.
  - Až 9 bodů dostane také řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(Q \log^2 Q)$.
  - Až 7 bodů dostane také řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(Q \log^3 Q)$.
- Až 5 bodů získá řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(Q \log Q)$, které navíc předpokládá, že je použita pouze jedna barva ($C = 1$ pro všechny obdélníky).
- Až 3 body získá řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(Q^2)$, tedy efektivní pro $N, Q \leq 5\,000$.

Příklady

Vstup:

```
3 8
S 100 2 1 1
S 200 1 3 2
D 1 1
D 3 3
S 300 2 2 1000
D 1 3
D 2 3
D 3 3
```

```
200
-1
-1
200
300
```

V tomto příkladu je obrázek široký 3 pixely. Nejprve je doprostřed seslán jediný pixel barvy 100 a na něj široký obdélník barvy 200. Dolní pixel v prvním sloupci je zaplněn, ale ve třetím sloupci ještě nejsou tři pixely.

Po seslání vysokého obdélníku je situace ve výšce 3 následující: levý sloupec je příliš nízký, prostřední je vyvýšený první instrukcí a pravý je teď konečně zaplněn.

P-III-2 Telefony

Blíží se víkend, dle předpovědi ani mráček. Alice i Bob se chystají vyrazit na výlet, a jelikož si rádi telefonují, chtěli by si po cestě zavolat z nějaké telefonní budky. Přemýšlí a plánují, kam se každý z nich zajde podívat... Zapomenout ovšem nesmějí ani na své domácí úkoly. Potřebovali by tedy vědět, jak nejrychleji se mohou oba dostat do svých destinací, a přitom být někdy cestou zároveň u různých telefonních budek.

Soutěžní úloha

Krajina sestává z N kopců očíslovaných 1 až N, jejichž dvojice jsou propojené M obousměrnými stezkami. Přejít po stezce trvá vždy 1 minutu a je zaručeno, že z každého kopce lze dojít na libovolný jiný po nějaké posloupnosti stezek. Alice bydlí na kopci 1, Bob bydlí na kopci 2. Na T kopcích různých od 1 a 2 se nachází telefonní budka.

O víkendu plánují vyrazit oba zároveň ze svých domovů na výlet: Alice na nějaký kopec A, Bob na kopec B. Mohou nezávisle chodit po stezkách či stát na místě. Alespoň jednou se však musí ve stejný čas nacházet u *různých* telefonních budek, aby si mohli zavolat. Jejich plán je realizovatelný za čas $č$, jestliže navíc platí, že se mohou po celkem $č$ minutách oba nacházet na svých cílových kopcích. Délku jejich hovoru zanedbejme.

Cílem je zodpovědět celkem Q dotazů: Za jaký nejkratší čas je jejich plán realizovatelný pro dané cílové kopce A a B? *Toto je interaktivní úloha:* Alice s Bobem jsou nerozhodní, takže jejich dotazy nejsou známy dopředu – *nový dotaz dostanete až poté, co zodpovíte ten předchozí.*

Formát vstupu

Na prvním řádku dostanete čísla N (počet kopců), M (počet stezek), T (počet telefonních budek) a Q (počet dotazů). Na druhém řádku se nachází T různých čísel v rozsahu od 3 do N včetně, udávajících kopce s telefonní budkou. Na dalších M řádcích jsou dvojice různých čísel popisující, mezi kterými kopci vede stezka.

Následuje Q dotazů, totiž řádků s čísly A a B (cílovými kopci Alice a Boba).

Formát výstupu

Pro každý dotaz vypište na samostatný řádek jediné číslo: nejkratší čas v minutách, za který je příslušný plán realizovatelný. Interaktivitu úlohy nemusíte při čtení vstupu a vypisování výstupu nijak speciálně ošetřovat; stačí, když je z popisu vašeho řešení zřejmé, že odpověď na aktuální dotaz můžete vypsat dříve, než načtete ten následující.

Bodování

Pro každý vstup platí $4 \leq N, M \leq 30\,000$ a $2 \leq T \leq N - 2$.

- Až 10 bodů získá řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(TQ+TM)$ nebo obdobnou, tedy efektivní i pro $T \leq 1\,000$, $Q \leq 40\,000$.
  - Až 9 bodů dostane také řešení s logaritmem navíc.
  - Až 8 bodů dostane také řešení se dvěma logaritmy navíc.
- Až 5 bodů obdrží řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(T^2Q+TM)$ nebo obdobnou, tedy efektivní pro $T \leq 20$, $Q \leq 40\,000$.
- Až 2 body obdrží řešení s dodatečným předpokladem, že $T = 2$, a časovou složitostí $\mathcal{O}(QM)$, tedy efektivní pro $Q \leq 1\,000$.

Příklady

Vstup:

```
7 6 2 1
3 5
1 2
2 3
3 4
4 5
5 6
6 7
7 4
```

Výstup:

```
6
```

V tomto příkladu jsou kopce propojené v řadě za sebou. Alice vyrazí přímo za svým kopcem, Bob může třeba počkat 3 minuty doma a pak také vyrazit. Ve 4. minutě se oba nachází u různých telefonních budek, takže si mohou zavolat. Nejpozději na svůj kopec dorazí Alice, a to po 6 minutách. Dříve to zřejmě není možné, odpověď je tedy 6.

P-III-3 Těžba na asteroidech

Jirka je astronaut ve firmě Kutání Strategických Prvků™, která se zaměřuje na těžbu asteroidů. Jirka vždy přistane na asteroidu se svým věrným vrtákem a snaží se vytěžit co nejcennější suroviny. To ale musí stihnout dříve, než asteroid opustí Sluneční soustavu, jinak by se nevrátil domů. Pomozte mu určit, kolik nejvíce může na vytěžených surovinách vydělat.

Soutěžní úloha

Vrták se po asteroidu pohybuje po kolejnici, na které se může zastavit na jedné z n pozic; tyto pozice jsou očíslovány od 1 do n v pořadí podél kolejnice. Přesun na sousední pozici (s o jedna větším či menším číslem) zabere právě jednu sekundu. Nelze se samozřejmě přesunout z pozice číslo 1 na pozici s nižším číslem či z pozice číslo n na pozici s vyšším číslem.

Na aktuální pozici můžeme vrták pustit a tím za jednu sekundu vytěžit suroviny z nejvyšší dosud nevytěžené vrstvy. Tedy když vrták na dané pozici pustíme poprvé, vytěží tam všechny suroviny ve vrstvě číslo 1 seshora, podruhé vytěží suroviny ve vrstvě číslo 2 atd.

Na těžbu máme k dispozici od přistání čas právě t sekund. Z předchozího asteroidologického průzkumu známe přesnou cenu surovin v každé vrstvě na každé pozici (vrstvy $t+1$ a hlubší pro nás samozřejmě nejsou zajímavé). Jirka přistane na zadané pozici s, pak ale může vrták po kolejnici libovolně přesouvat či ho pouštět. Určete nejvyšší možnou celkovou cenu surovin, které může za čas t vytěžit.

Formát vstupu

Na prvním řádku dostanete tři přirozená čísla n, t a s: počet pozic, čas na těžení a startovní pozici. Následuje t řádků popisujících ceny surovin v jednotlivých vrstvách: Na i-tém z nich dostanete n nezáporných celých čísel $g_{i,1}$, $g_{i,2}$, …, $g_{i,n}$, kde $g_{i,j}$ udává cenu surovin na pozici j ve vrstvě číslo i seshora.

Formát výstupu

Na výstup vypište jediné nezáporné celé číslo – nejvyšší možnou celkovou cenu surovin, které Jirka dokáže vytěžit za čas t.

Bodování

- Až 10 bodů můžou získat řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(nt^2)$, tedy efektivní pro $n, t \leq 500$.
- Až 8 bodů obdrží řešení efektivní pro $n, t \leq 500$, které navíc předpokládá, že $s = 1$. Chcete-li tento předpoklad využít ve svém řešení, důrazně to do něj napište.
- Nejvýš 6 bodů získají řešení efektivní pro $n, t \leq 100$.
- Až 2 body může získat libovolné správné řešení.

Příklady

Vstup:
```
3 4 2
1 3 2
9 1 2
0 1 1
0 1 0
```
Výstup:
```
13
```

Nejlepší je vytěžit ložisko s hodnotou 3 *na pozici* 2*, potom se pohnout doleva na pozici* 1 *a dvakrát těžit ložiska v celkové hodnotě* 10*.*

Vstup:
```
4 6 2
10 10 10 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
```
Výstup:
```
30
```

V tomto vstupu nejdřív vytěžíme $g_{1,2} = 10$*, poté se pohneme doprava na pozici* 3 *a vytěžíme* $g_{1,3} = 10$ *a nakonec dvakrát doleva na pozici* 1 *a vytěžíme* $g_{1,1} = 10$*.*