52. ročník Matematické olympiády – 2002/2003

Úlohy krajského kola kategorie P

Krajské kolo 52. ročníku MO kategorie P se koná v úterý 7. 1. 2003 v dopoledních hodinách. Na řešení úloh máte 4 hodiny čistého času. V krajském kole MO-P se neřeší žádná praktická úloha, pro zajištění rovných podmínek řešitelů ve všech krajích je použití počítačů při soutěži zakázáno.

Řešení každého příkladu musí obsahovat:

- **Popis řešení,** to znamená slovní popis použitého algoritmu, argumenty zdůvodňující jeho správnost (případně důkaz správnosti algoritmu), diskusi o efektivitě vašeho řešení (časová a paměťová složitost). Slovní popis řešení musí být jasný a srozumitelný i bez nahlédnutí do samotného zápisu algoritmu (do programu).
- **Program.** V úlohách **P-II-1**, **P-II-2** a **P-II-3** je třeba uvést dostatečně podrobný zápis algoritmu, nejlépe ve tvaru zdrojového textu nejdůležitějších částí programu v jazyce Pascal nebo C. Ze zápisu můžete vynechat jednoduché operace jako vstupy, výstupy, implementaci jednoduchých matematických vztahů apod. V úloze **P-II-4** místo toho zapište své řešení jako reverzibilní proceduru.

Hodnotí se nejen správnost programu, ale také kvalita popisu řešení a efektivita zvoleného algoritmu.

Vzorová řešení úloh naleznete krátce po soutěži na Internetu na adrese *http://mo.mff.cuni.cz/*. Na stejném místě budou zveřejněny i výsledky všech krajských kol a seznam postupujících do celostátního kola. Naleznete zde také popis prostředí, v němž budete na celostátním kole řešit praktické úlohy.

P-II-1 Tvůrci hvězd

Společnost pro výzkum mimozemského života vypátrala, že náš vesmír byl v minulosti (a možná ještě teď je) osídlen mimořádně vyspělou technickou civilizací. Pracovně byla tato civilizace pojmenována Tvůrci hvězd, protože technická vyspělost rasy umožňovala dokonce i tvořit nové hvězdy. Tvůrci hvězd měli silně vyvinutý smysl pro pořádek a symetrii. Proto stavěli hvězdy středově symetricky okolo bodu, kde se kdysi nalézala jejich domovská hvězda (než vybuchla jako supernova). Vědci by nyní rádi dodali své teorii trochu více věrohodnosti, a tak by chtěli zjistit, jestli hvězdy vytvořené civilizací leží skutečně středově symetricky okolo nějakého bodu (skutečnou pozici domovské hvězdy totiž neznají). Protože hvězd je poměrně hodně, rozhodli se řešit problém s pomocí výpočetní techniky.

Vaším úkolem je napsat program, který dostane na vstupu počet hvězd vytvořených civilizací N a souřadnice oněch N hvězd (poloha každé hvězdy je určena trojicí celých čísel x_i, y_i, z_i). Můžete předpokládat, že žádné dvě hvězdy neleží na stejném místě (tzn. nemají shodné všechny tři souřadnice). Na výstup program vypíše bod, podle kterého jsou hvězdy rozmístěny středově symetricky, popřípadě zprávu, že takový bod neexistuje. Hvězdy jsou rozmístěny symetricky okolo středu S, pokud pro každou hvězdu H existuje hvězda H' taková, že S je středem úsečky HH'. Speciálně může nějaká hvězda ležet přímo ve středu S.

Příklad 1: Pro 6 hvězd na souřadnicích $(0, 1, -1), (2, 0, 1), (4, 0, 3), (0, 4, 1), (4, 3, 5), (2, 4, 3)$ leží střed na souřadnicích $(2, 2, 2)$.

Příklad 2: 4 hvězdy na souřadnicích $(0, 0, 0), (5, 0, 0), (2, 1, 0), (2, -1, 0)$ nejsou umístěny středově symetricky.

P-II-2 Knihovna

Knihovnice Míla opět potřebuje objednat další skříň do své knihovny. Bohužel však zase sama neumí spočítat, jak by tato skříň měla být široká, a tak vás znovu poprosila o pomoc. Míla by ráda do nové skříně umístila celkem N knih, ale narozdíl od úlohy P-I-2 z prvního kola je jí jedno, v jakém pořadí knihy do skříně umístí. Vstupem vašeho programu bude posloupnost N čísel v_i, $1 \leq i \leq N$, kde v_i je výška i-té knihy. Pro zjednodušení předpokládejme, že všechny knihy mají stejnou tloušťku – 1 cm.

Váš program by měl ze zadaných údaju spočítat následující:

- Šířku skříně – označme ji s.
- Počet poliček ve skříni – označme ho p.
- Výšku w_i i-té poličky pro každé $1 \leq i \leq p$.
- Rozmístění knih do skříně se spočítanými parametry.

Rozmístění knih, které váš program nalezne, musí z pochopitelných důvodů splňovat následující:

- Výška libovolné z knih umístěných do i-té poličky je nejvýše w_i.
- Součet tlouštěk knih umístěných do jedné poličky je nejvýše s cm, tj. tato polička obsahuje nejvýše s knih.
- Výška skříně, která je rovna $\sum_{i=1}^{p} w_i + (p+1) \cdot 1$ cm (předpokládáme, že šířka desek oddělujících poličky ve skříni je 1 cm), nesmí přesáhnout výšku místnosti 250 cm.
- s je nejmenší možné.

Příklad: Předpokládejme, že Míla chce do skříně umístit celkem 14 knih, z nichž devět má výšku 50 cm a pět má výšku 40 cm. Jedno z optimálních řešení by mohlo vypadat následovně: Skříň bude mít šířku pro 3 knihy a celkem 5 poliček – tři z nich budou mít výšku 50 cm a dvě poličky výšku 40 cm. Nalézt jedno konkrétní možné rozmístění knih do skříně je snadné.

P-II-3 Transformace

Jedna z metod zpracování textu používá následující transformační algoritmus: Na vstupu mějme n-znakový řetězec $C = c_1 c_2 \ldots c_n$. Řetězec $C' = c_{k+1} c_{k+2} \ldots c_n c_1 \ldots c_k$ nazýváme řetězcem C zrotovaným o k (tedy např. `akaabr` je řetězec `abraka` zrotovaný o 3). Vezměme si zadaný řetězec C a napišme si pod sebe C, C zrotovaný o 1, …, C zrotovaný o $n-1$. Tím jsme získali tabulku n řetězců. Ty setřídíme v běžném lexikografickém pořadí (tzn. podle abecedy). Z výsledné tabulky si vybereme poslední sloupec S; dále si také zapamatujeme číslo řádku $\check{r}$, na němž se po setřídění nachází náš původní řetězec (je-li těchto řádků více, libovolný z nich). Dvojice $(S, \check{r})$ je výsledek transformace zadaného vstupu. Jakkoli magicky to vypadá, tyto dva údaje stačí k rekonstrukci původního řetězce.

Příklad: Na vstupu máme slovo `abraka`. Transformace probíhá takto:

```
abraka              aabrak
brakaa              abraka *
rakaab      ⟶      akaabr
akaabr              brakaa
kaabra              kaabra
aabrak              rakaab
```

Výsledkem tedy je slovo `karaab` a informace, že původně zadané slovo je na druhém řádku setříděné tabulky.

Soutěžní úloha:

Program dostane na vstupu řetězec S délky n ($1 \leq n \leq 10000$) a číslo $\check{r}$ ($1 \leq \check{r} \leq n$). Úkolem je najít řetězec C takový, že dvojice $(S, \check{r})$ je výsledkem aplikace výše popsané transformace na řetězec C (máte zaručeno, že takový existuje).

Poznámka: Budete-li psát program v Pascalu, můžete předpokládat, že do stringu se řetězec této délky vejde.

Uvědomte si, že při použití v praxi se délky zpracovávaných vstupů pohybují řádově ve stovkách kilobytů; je tedy nevhodné, aby váš program měl kvadratické časové nebo paměťové nároky.

P-II-4 Reverzibilní výpočty: Ouřad

(Definice reverzibilních výpočtů je stejná jako v domácím kole, naleznete ji ve studijním textu za touto úlohou.)

Oblastní Ouřad sídlí v městě $\mathcal{M}$ v n budovách. Aby si ouředníci sídlící na různých místech mohli rychle posílat všechny ty dopisy, přípisy, zápisy, dobropisy, vrubopisy, tiskopisy a vůbec všelijaké spisy s podpisy, vybudovali si potrubní poštu – systém rour spojujících některé dvojice budov. Těmito rourami se pomocí stlačeného vzduchu posílají zásilky. Aby nedocházelo ke kolizím, je každá roura využívána jenom jedním směrem. Nejsou si ale jisti, jestli již postavili všechna potřebná potrubí, a tak je zajímá, jak zjistit, zda mezi nějakými dvěma zadanými místy je možné dopravit zásilku, a to buďto přímo nebo s přeložením zásilky v nějaké mezistanici, případně mezistanicích.

Napište *reverzibilní* proceduru `Zkoumej(var n:word; var A:array [1..n] of array [1..n] of bit; var x,y,d:word)`, která dostane jako vstup počet budov n, matici A popisující v prvku $A[i][j]$, zda vede (`1`) či nevede (`0`) roura z i-té do j-té budovy a čísla budov x a y. Poté do proměnné d přičte, s jakým nejmenším počtem přeložení je možno přepravit zásilku z budovy x do budovy y, případně přičte číslo větší než n, pokud to možné není. Snažte se dosáhnout co nejmenší *prostorové* složitosti výpočtu při zachování polynomiální časové složitosti.

Studijní text:

Při hledání nových úspornějších polovodičových technologií se zjistilo, že nejvíce energie se spotřebovává při mazání informací, tudíž že optimální jsou ty výpočty, při nichž se žádné informace neztrácejí. Takovým výpočtům se říká *reverzibilní*, protože díky této vlastnosti mohou probíhat oběma směry – dokáží nejen spočítat ze vstupu výstup, ale také z výstupu jednoznačně určit vstup. Vydejme se proto i my do tohoto zvláštního symetrického světa a prozkoumejme, jak se programuje „ekologicky“.

Začněme tím nejjednodušším, co se v klasických programovacích jazycích vyskytuje, a to je přiřazovací příkaz. Nic takového si bohužel dovolit nemůžeme, ztratili bychom totiž původní obsah proměnné, do níž se přiřazuje. Místo toho zavedeme několik příkazů modifikujících proměnnou vratně:

- *proměnná* `+=` *hodnota* – přičte hodnotu k proměnné.
- *proměnná* `-=` *hodnota* – odečte hodnotu od proměnné.
- *proměnná* `^=` *hodnota* – přixoruje hodnotu k proměnné. (*xor* je bitová operace, která má pro jednobitová čísla výsledek 1 právě tehdy, když jsou oba vstupy různé: $0 \text{ xor } 0 = 1 \text{ xor } 1 = 0$, $0 \text{ xor } 1 = 1 \text{ xor } 0 = 1$. Vícebitová čísla se xorují po bitech – i-tý bit prvního čísla s i-tým bitem druhého dají i-tý bit výsledku: $5 \text{ xor } 15 = (0101)_2 \text{ xor } (1111)_2 = (1010)_2 = 10$. Obecně pro libovolná čísla x a y platí $x \text{ xor } y = y \text{ xor } x$, $x \text{ xor } x = 0$, $x \text{ xor } 0 = x$ a $(x \text{ xor } y) \text{ xor } z = x \text{ xor } (y \text{ xor } z)$. Podobně lze zavést operace *and* a *or*: $0 \text{ and } 0 = 0 \text{ and } 1 = 1 \text{ and } 0 = 0$, $1 \text{ and } 1 = 1$, $0 \text{ or } 0 = 0$, $0 \text{ or } 1 = 1 \text{ or } 0 = 1 \text{ or } 1 = 1$, ale ty nejsou reverzibilní, takže pro nás nebudou tak důležité.)
- *proměnná* `:=` *proměnná* – prohodí obsah dvou proměnných.

Abychom se vyhnuli problémům s přetečením (co by pak byla inverzní operace?), dohodněme se, že budeme počítat pouze s nezápornými celými čísly v rozsahu $0 \ldots maxword$ (takovým číslům budeme říkat *přirozená*) a všechny operace budou vydávat výsledky modulo $maxword + 1$, tedy opět přirozené číslo. Příkaz `+=` provedený pozpátku je pak totéž, co `-=` a opačně; příkazy `^=` a `:=` jsou inverzní samy k sobě.

Co všechno ale může být *hodnota*? Jistě libovolná konstanta nebo proměnná (ovšem různá od té, do které přiřazujeme, jinak bychom mohli napsat třeba `a -= a`, což určitě reverzibilní není). Také bychom měli povolit nějaké další aritmetické operace – ty samy nemusí být reverzibilní; důležité je, aby se jejich výsledek zpracoval reverzibilně. Každý složitější výraz pak už můžeme přepsat na výrazy s jedinou operací, například `x ^= (a*b)+(c*d)` rozepíšeme takto:

```
t1 += a*b;
t2 += c*d;
x  ^= t1+t2;
t2 -= c*d;
t1 -= a*b;
```

Zde `t1` a `t2` jsou pomocné proměnné, které jsou na počátku výpočtu nulové a po dopočítání výrazu se opět k nulovým hodnotám vrátí, takže je můžeme používat pro všechny výrazy v celém programu. Podobně se vypořádáme s každým výrazem – nejdříve si spočítáme všechny mezivýsledky do pomocných proměnných, pak hlavní výsledek použijeme, načež mezivýsledky opět „odpočítáme“. Takže můžeme používat i složité výrazy a spolehnout se na překladač, že je sám rozepíše.

Trik s odpočítáváním mezivýsledků a spouštěním částí programu pozadu je, zdá se, velice šikovný, tak si rovnou nadefinujeme, že `undo` *příkaz* znamená spustit *příkaz* pozpátku a `wrap` *příkaz*$_1$ `on` *příkaz*$_2$ provede nejdříve *příkaz*$_1$, pak *příkaz*$_2$ a nakonec `undo` *příkaz*$_1$ pro odpočítání mezivýsledků. Náš příklad s výrazem pak snadno zapíšeme takto:

```
wrap begin
   t1 += a*b;
   t2 += c*d
   end
on x ^= t1+t2
```

Podmíněné příkazy `if`–`then`–`else` můžeme používat bez obav, pokud zaručíme, že po provedení podmíněného příkazu dopadne podmínka úplně stejně jako předtím (třeba proto, že žádná z proměnných, které v ní vystupují, není v podmíněné části programu měněna). Pak totiž i při provádění výpočtu pozpátku rozpoznáme, kterou z větví se výpočet má vydat.

S cykly je situace svízelnější, protože tam si s neměnícími se podmínkami nevystačíme (to by každý cyklus buďto neproběhl nikdy nebo by se opakoval do nekonečna). Dalo by se to, pravda, zachránit tím, že by každý cyklus

měl jednu podmínku, která by fungovala současně jako vstupní i výstupní – sami si rozmyslete, jak by takové cykly vypadaly. My si ale pro naše účely vystačíme s cykly `for`, ty určitě reverzibilní jsou, pokud řídící proměnnou cyklu ani její meze žádný příkaz uvnitř cyklu nemodifikuje, a to se koneckonců nesmí ani v mnoha jiných programovacích jazycích. Navíc abychom nemuseli řešit, co se v řídící proměnné musí vyskytovat před začátkem cyklu a co po jeho konci, domluvíme se, že příkaz `for` si tuto proměnnou sám vytvoří a na konci ji zase zruší.

Příkaz `goto` pro jistotu zakážeme úplně.

Procedury mohou také fungovat reverzibilně, ale musíme se vyhnout kopírování parametrů a výsledků; budeme proto vše vždy předávat odkazem (pascalské `var`). Lokální proměnné budou při spuštění procedury vždy nulové a procedura sama je musí, než skončí, opět do tohoto stavu vrátit. Rekurze je bez problémů.

Nyní již máme vše potřebné, abychom si vybudovali reverzibilní programovací jazyk. Ten náš bude vzdáleným příbuzným Pascalu. Vypadá takto:

Datové typy: K dispozici máme typy `word` (celá čísla bez znaménka), `bit` (jednobitové číslo, tedy `0` nebo `1`; používá se rovněž pro pravdivostní hodnoty) a pole `array [`x`..`y`] of` *typ* (x a y udávají meze indexů a jsou to buďto čísla nebo výrazy, jejichž hodnota se po dobu existence pole nezmění – to si proti Pascalu dovolíme navíc). Prvky polí mohou být také pole, čímž získáme pole vícerozměrná. Svůj vlastní typ si můžete zavést deklarací `type` *identifikátor* `=` *typ*`;`

Identifikátory slouží k pojmenovávání typů, proměnných a procedur a jsou to libovolné řetězce písmen, číslic a znaků '`_`', které nezačínají číslicí a které se neshodují s některým z klíčových slov jazyka (zde sázena `courierem`). Malá a velká písmena se nerozlišují.

Procedury se deklarují konstrukcí

> `procedure` *identifikátor* `(` *parametry* `);`
> *deklarace* lokálních typů, proměnných a procedur
> `begin`
> *příkazy* oddělené středníky
> `end;`

Zde *parametry* mají syntaxi `var` *jméno*`:`*typ*, kde *jméno* je identifikátor, jímž se lze na předaný parametr uvnitř procedury odkazovat. Pokud má procedura parametrů více, oddělují se středníky, jsou-li stejného typu, lze zkracovat, např.: `procedure X(var m,n:integer; var Z:array [1..n] of bit);`. Všechny deklarované objekty (parametry, typy, proměnné i procedury) existují pouze během volání této procedury, každá procedura vidí „své“ lokální proměnné a navíc lokální proměnné všech procedur, uvnitř kterých je deklarována (zastiňování se řídí stejnými pravidly jako v Pascalu nebo C).

Proměnné jsou pojmenovány identifikátory, musí se vytvořit deklarací `var` *identifikátor* `:` *typ*`;`. Při vstupu do procedury, v níž jsou deklarovány, mají nulovou hodnotu (v případě pole ji mají všechny jeho prvky) a než proměnná na konci procedury zanikne, musí být opět nulová. Deklaraci více proměnných téhož typu lze zkrátit, např. `var` i_1`,` i_2`, ...,` i_n `:` *typ*`;`.

Výrazy mohou obsahovat:

- *konstanty* (přirozená čísla a `maxword` reprezentující maximální dostupné číslo),
- *proměnné*,
- *prvky polí* (*pole*`[`*výraz*`]`),
- *číselné operace* (vstupem i výstupem jsou přirozená čísla) `+`, `-`, `*`, `div` (celá část podílu), `mod` (zbytek po dělení), `and`, `or`, `xor` (bitové operace viz definice o pár odstavců výše) a `not` (prohození nulových a jedničkových bitů), výsledky jsou automaticky modulo *maxword* + 1.
- *relační operace* (vstupem jsou dvě čísla, výstupem bitová hodnota `1`, když relace platí, `0` pokud nikoliv) `<`, `>`, `=`, `<=`, `>=` a `<>`,
- *závorky* (pokud nezávorkujeme, operátory mají své obvyklé priority).

Příkazy existují tyto:

- *Blok:* `begin` *příkazy* oddělené středníky `end` – způsobí vykonání všech příkazů, které obsahuje, v daném pořadí.
- *Modifikační příkazy: proměnná* `+=` *výraz* – způsobí vyhodnocení výrazu a přičtení jeho výsledku k dané proměnné (může to být rovněž prvek pole indexovaný nějakým výrazem). **Proměnná (resp. prvek pole),**

kterou příkaz modifikuje, se již nesmí nikde jinde v témže příkazu vyskytnout. Analogicky příkazy `-=` a `^=`.

- *Prohazovací příkaz: proměnná* `=:=` *proměnná* – prohodí obsah dvou proměnných stejného typu. Pokud se jedná o prvky polí, nesmí se ve výrazech určujících indexy používat žádné z těchto polí.
- *Podmíněný příkaz:* `if` *podmínka* `then` *příkaz*$_1$ `else` *příkaz*$_2$ – vyhodnotí se *podmínka*, což je výraz s bitovým výsledkem, a pokud je roven jedné, vykoná se první z příkazů, jinak druhý. **Platnost podmínky musí zůstat po vykonání příkazu nezměněna.** Část `else` je možno vypustit, v případech typu `if x then if y then a else b` se pak `else` vztahuje vždy k nejbližšímu předchozímu ještě neukončenému příkazu `if`.
- *Příkaz cyklu:* `for var` *identifikátor* `=` d `to` h `do` *příkaz* – založí novou proměnnou daného jména a daný příkaz vykonává pro tuto proměnnou nabývající postupně hodnot $d, d+1, \ldots, h$, načež proměnnou opět zruší. Meze d a h jsou celočíselné výrazy, pokud $d > h$, příkaz se neprovede ani jednou. **Příkaz musí zachovávat hodnotu řídící proměnné, jakož i mezí cyklu (to znamená, že je může modifikovat, ale na konci jednoho průchodu cyklem musí mít obojí opět původní hodnotu).** Též je možno použít h `downto` d, tehdy cyklus běží pozpátku, tj. $h, h-1, \ldots, d$.
- *Volání procedury: procedura*`(`*parametr*$_1$`, ... ,` *parametr*$_n$`)` – zavolá proceduru se zadanými parametry, což mohou být buďto proměnné nebo indexovaná pole (výrazy v indexech ovšem musí mít po návratu z procedury stejnou hodnotu jako před jejím zavoláním) a jejich počet i typy musí odpovídat deklaraci procedury.
- *Příkaz obrácení výpočtu:* `undo` *příkaz* – provede daný příkaz pozpátku podle následujících pravidel:

`undo begin` p_1 `;` ... `;` p_n `end`	$\longrightarrow$	`begin undo` p_n `;` ... `;` `undo` p_1 `end`
`undo` x `+=` y	$\longrightarrow$	x `-=` y
`undo` x `-=` y	$\longrightarrow$	x `+=` y
`undo` x `^=` y	$\longrightarrow$	x `^=` y
`undo` x `=:=` y	$\longrightarrow$	x `=:=` y
`undo if` x `then` y `else` z	$\longrightarrow$	`if` x `then undo` y `else undo` z
`undo for` x `=` d `to` h `do` p	$\longrightarrow$	`for` x `=` h `downto` d `do undo` p
`undo` $P(x_1, \ldots, x_n)$	$\longrightarrow$	`undo` těla procedury (`begin` ... `end`)
`undo undo` p	$\longrightarrow$	p

  Konstrukce `begin` p `; undo` p `end` tedy nevykoná nic, ač může počítat poměrně dlouho.
- *Příkaz lokálního výpočtu:* `wrap` *příkaz*$_1$ `on` *příkaz*$_2$ je zkratkou za konstrukci `begin` *příkaz*$_1$ `;` *příkaz*$_2$ `; undo` *příkaz*$_1$ `end`.

Hlavní program nebudeme zavádět. Abychom se vyhnuli problémům se vstupy a výstupy, budeme vše vždy programovat jako procedury. Ty jako své parametry dostanou jak proměnné, které obsahují vstupní data, tak proměnné, které mají být předepsaným způsobem zmodifikovány podle výsledku.

Časová a prostorová složitost se definuje podobně jako v klasickém programování: časovou složitostí výpočtu je počet vykonaných příkazů modifikujících proměnné, ať již proběhly kterýmkoliv směrem. Množství paměti využité programem v nějakém okamžiku výpočtu spočítáme jako součet velikostí všech lokálních proměnných (typy `bit` a `word` mají jednotkovou velikost, pole má velikost rovnou součtu velikostí svých prvků) a parametrů (ty se všechny počítají jako jednotka, ať už jsou kteréhokoliv typu, protože jsou předávány odkazem) všech právě zavolaných procedur + jednotka navíc za každou takovou proceduru. Prostorovou složitostí programu nazveme pak maximum z využitého množství paměti přes celou dobu běhu programu. (Pozor, jelikož program je pro nás vždy procedurou, jeho vstupy a výstupy se do prostorové složitosti započítávají pouze jednotkově, i když to mohou být velká pole.)

Zbývá maličkost: cokoliv uzavřeného do složených závorek `{` a `}` je *komentářem*, který je počítačem zcela ignorován, jako kdyby na jeho místě byla mezera. Komentář nesmí uvnitř obsahovat složené závorky.

Příklad 1: Procedura pro prohození obsahu dvou proměnných (která ukazuje, že `=:=` se dá snadno odvodit pomocí ostatních operací). Časová i prostorová složitost jsou konstantní, tedy $O(1)$.

```
procedure Prohod(var x,y:word);
begin                  { x = X, y = Y  (X,Y jsou pův. hodnoty) }
   x ^= y;             { x = X xor Y, y = Y }
   y ^= x;             { x = X xor Y, y = Y xor (X xor Y) = X }
   x ^= y              { x = (X xor Y) xor X = Y, y = X }
end;
```

Příklad 2: Procedura pro výpočet maxima ze zadaných n čísel. Je dáno pole X celých čísel a proměnná max, k níž máme spočtené maximum přičíst. To dokážeme takto: Nejprve si předpočítáme do $M[i]$ maximum z čísel $X[1], \ldots, X[i]$, pak přičteme $M[n]$ k max a nakonec $M[i]$ opět vyprázdníme, což snadno zapíšeme pomocí příkazu `wrap`. Časová i prostorová složitost jsou $O(n)$, čili lineární.

```
procedure Maximum(var n:word; var X:array [1..n] of word; var max:word);
var M:array [0..n] of word;
begin
   wrap
      for var i=1 to n do
         if X[i]>M[i-1] then
            M[i] += X[i]
         else
            M[i] += M[i-1]
   on max += M[n];
end;
```