

## 69. ročník matematické olympiády

### Úlohy krajského kola kategorie C

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel  $a$  a  $b$ , jejichž největší společný dělitel je roven oběma číslům  $30 - a$  i  $42 - b$ .
2. Konvexní osmiúhelník  $ABCDEFGH$  má všechny strany stejně dlouhé a protější dvojice stran rovnoběžné. Uvažme body  $X, Y, Z$  takové, že čtyřúhelníky  $ABCX, DEFY, GHAZ$  jsou rovnoběžníky. Dokažte, že  $XZ \perp AY$ .
3. Kolik trojmístných čísel má tu vlastnost, že vyškrtnutím některé číslice dostaneme dvojmístné číslo, které je druhou mocninou nějakého celého čísla? (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvojmístná čísla.)
4. Pro nezáporná reálná čísla  $a, b, c$  platí  $a + b + c = 1$ . Najděte největší a nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2.$$

Úlohy řešte od 9:00 do 13:00, používejte přitom jen psací a rýsovací prostředky a MF tabulky. Svá řešení pište na papíry formátu A4. Na stránce 1 každé úlohy uveďte požadovanou hlavičku, na dalších stránkách napište jen na první řádek své jméno a příjmení, číslo úlohy a číslo stránky. Se sepsanými řešeními po 13. hodině naložte podle dříve ohlášených instrukcí.