69. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c lze šesti způsoby doplnit jako koeficienty kvadratické rovnice

$$\square x^2 + \square x + \square = 0.$$

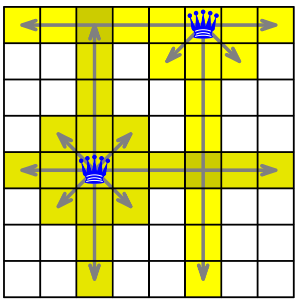
a) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že všechny sestavené rovnice mají alespoň jeden reálný kořen.

b) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že právě pět ze šesti sestavených rovnic má alespoň jeden reálný kořen.

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník s neshodnými stranami AC, BC a průsečíkem výšek V. Na přímce AB sestrojme body A', B' ($A' \neq A$, $B' \neq B$) takové, že $|CA'| = |CA|$ a $|CB'| = |CB|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ACB' a VCA' jsou shodné.

3. Určete nejmenší přirozené číslo n, pro něž platí: Jestliže některé přirozené číslo má alespoň n trojmístných násobků, pak 840 je jedním z nich.

4. Netradiční figurka, kterou nazveme „nemocná dáma“, ohrožuje libovolné pole řádku i sloupce, na nichž stojí, zatímco na diagonále ohrožuje pouze pole sousední. Kolik nejméně „nemocných dam“ potřebujeme rozmístit na šachovnici 8×8 tak, aby ohrožovaly všechna neobsazená pole?



Úlohy řešte od 9:00 do 13:00, používejte přitom jen psací a rýsovací prostředky a MF tabulky. Svá řešení pište na papíry formátu A4. Na stránce 1 každé úlohy uveďte požadovanou hlavičku, na dalších stránkách napište jen na první řádek své jméno a příjmení, číslo úlohy a číslo stránky. Se sepsanými řešeními po 13. hodině naložte podle dříve ohlášených instrukcí.