60. ročník Matematické olympiády – 2010/2011

Úlohy ústředního kola kategorie P – 1. soutěžní den

Na řešení úloh máte 4,5 hodiny čistého času. Řešení každé úlohy pište na samostatný list papíru. Při soutěži je zakázáno používat jakékoliv pomůcky kromě psacích potřeb (tzn. knihy, kalkulačky, mobily, apod.).

Řešení každého příkladu musí obsahovat:

- **Popis řešení,** to znamená slovní popis použitého algoritmu, argumenty zdůvodňující jeho správnost (případně důkaz správnosti algoritmu), diskusi o efektivitě vašeho řešení (časová a paměťová složitost). Slovní popis řešení musí být jasný a srozumitelný i bez nahlédnutí do samotného zápisu algoritmu (do programu). Není vhodné odkazovat se na Vaše řešení předchozích kol, opravovatelé je nemají k dispozici; na autorská řešení se odkazovat můžete.
- **Program.** V úlohách **P-III-1** a **P-III-2** je třeba uvést dostatečně podrobný zápis algoritmu, např. ve tvaru pseudokódu nebo zdrojového textu nejdůležitějších částí programu v programovacím jazyce Pascal nebo C/C++. Ze zápisu můžete vynechat jednoduché operace jako vstupy, výstupy, implementaci jednoduchých matematických vztahů apod. V řešení úlohy **P-III-3** je nutnou součástí řešení program pro grafový počítač.

Za každou úlohu můžete získat 0 až 10 bodů. Hodnotí se nejen správnost programu, ale také efektivita zvoleného algoritmu a kvalita popisu řešení.

P-III-1 Básník Honzík

Honzík Nerudů si spokojeně hověl v lavici a v duchu se procházel po Malé Straně. „Jene, chytej!“, vytrhl ho ze zadumání výkřik spolužačky Božky Němcové a náraz boty do jeho hlavy. Být to kdokoliv jiný, jistě by neušel spravedlivému trestu, jenže Boženka byla jeho tajnou láskou už od třetí třídy. Jak rád by ji pozval na procházku podél Vltavy. Leč když se opovážil požádat ji, se smíchem ho odbyla slovy:

Jelikož jsem romantička,
obměkčí mě jen básnička.
Zveršuj tedy žádost svou,
a projdem se nad Vltavou.

Jenže Honzík měl ze slohu vždycky čtyřku a paní učitelce stoupaly vlasy hrůzou, jen se chopil pera. Naštěstí měl dobrého kamaráda Járu Cimrmana. Ten mu pověděl, že psát básně je strašně jednoduché a stačí jen dosáhnout toho, aby se verše co nejvíce rýmovaly (později bude tato teorie publikována pod názvem absolutní rým). To byla

sice dobrá rada, ale hledání co nejvíce se rýmujících slov je často velmi obtížné, a tak požádal o pomoc vás.

Soutěžní úloha

Máte dán seznam obsahující N slov skládajících se z malých písmen anglické abecedy. Vaším úkolem je zodpovídat Honzíkovy dotazy, což znamená, že pro jím zadané slovo s máte najít slovo r ze seznamu, které má největší společný koncový úsek se slovem s. Např. slova `Zbynek` a `pelynek` mají společný koncový úsek `ynek` délky 4.

Pokud je v seznamu více takových slov, vyberte z nich lexikograficky nejmenší (lexikografické uspořádání je to, které se používá ve slovnících: nejdříve podle prvního písmena, pak podle druhého atd.; `ch` uvažujeme jako dvě písmenka). Pokud naopak v seznamu není žádné slovo se společným koncovým úsekem délky alespoň 1, vypište `NELZE`.

Protože dotazů může být hodně, snažte se optimalizovat rychlost odpovědi na dotaz i za cenu delšího předzpracování seznamu slov.

Poznámka: Pokud úlohu nedokážete vyřešit efektivně, zkuste popsat alespoň řešení, které z vyhovujících slov vypíše libovolné namísto lexikograficky nejmenšího.

Formát vstupu

Na prvním řádku budou dvě čísla N a K, po kterých následuje N slov seznamu, každé na samostatném řádku. Následuje K slov, $K \leq 10^4$, opět každé na samostatném řádku, která reprezentují Honzíkovy dotazy. Součet délek všech slov seznamu nepřesáhne 10^6 znaků, tedy speciálně $N \leq 10^6$. Žádné slovo v seznamu ani žádné z K slov k vyhledání nebude mít víc jak 10^4 znaků.

Formát výstupu

Pro každý z K Honzíkových dotazů vypište na samostatný řádek slovo s maximálním společným koncovým úsekem (případně lexikograficky nejmenší, pokud jich je víc) mezi slovy v seznamu. Pokud žádné takové slovo neexistuje, vypište `NELZE`.

Příklad

Vstup:	*Výstup:*

`5 3`
`pluji`
`listuji`
`lituji`
`nepreji`
`basnik`
`bagr`
`kvituji`
`dekuji`
	`NELZE`
	`lituji`
	`listuji`

Pro slovo `dekuji` *máme na výběr mezi slovy* `pluji`, `listuji` *a* `lituji`, *která mají stejnou délku společného koncového úseku (určitý společný koncový úsek má i se slovem* `nepreji`, *ale ten má délku pouze dva);* `listuji` *je z nich lexikograficky nejmenší.*

P-III-2 Úřad

Úřad pro minimalizaci byrokracie zaměstnává několik tisíc úředníků. Ti jsou pro zvýšení efektivity své práce hierarchicky uspořádaní, tj. každý z nich má právě jednoho přímého nadřízeného; jedinou výjimkou je ministr pro minimalizaci byrokracie, který je nejvýše postaveným úředníkem a žádného nadřízeného nemá. Každý z úředníků smí vykonávat právě jeden úkon (někteří smí dávat pouze kulatá razítka, někteří pouze hranatá, někteří mají na starosti styk s veřejností, atd.). Výjimkou je opět ministr, o kterém legendy tvrdí, že je schopen vykonávat všechny funkce poskytované úřadem.

Potřebuje-li tedy někdo něco zařídit na úřadě, nejprve si vybere nějakého úředníka, který smí komunikovat s veřejností. Ten už ale nesmí vykonávat žádný jiný úkon, a není mu tedy schopen přímo pomoci. Proto ho pošle za svým nadřízeným. Může-li nadřízený požadovaný úkon provést, učiní tak, jinak zájemce přepošle za svým nadřízeným. A toto se opakuje, dokud zájemce nedorazí k někomu schopnému ho obsloužit.

Teď jsou volby na dohled a voliči si stěžují, že někteří úředníci nic nedělají. Například dává-li úředník a všichni jeho přímí podřízení kulatá razítka, pak se k němu nikdy žádný požadavek nedostane. Obdobně úředník, jehož žádný (ani nepřímý) podřízený nemá na starosti styk s veřejností, nikdy nemusí nic dělat. Potřebovali bychom tedy nalézt všechny takové nezaměstnané úředníky, abychom je mohli povýšit.

Poznamenejme ještě, že ministra nikdy za zbytečného nepovažujeme.

Soutěžní úloha

Úředníci jsou očíslováni přirozenými čísly 1, ..., N, kde úředník číslo 1 je ministr. Pro každého z nich až na ministra máme zadáno číslo jeho nadřízeného, které je vždy menší než číslo úředníka. Pro každého úředníka až na ministra také máme zadáno číslo úkonu, který smí vykonávat. Úkony jsou očíslovány přirozenými čísly 1, ..., M, kde úkon číslo 1 je styk z veřejností. Vypište čísla všech úředníků, kteří nikdy nic nedělají. Úředník číslo k, který smí vykonávat úkon číslo u, něco dělá, jestliže $u = 1$ nebo existuje posloupnost čísel $k = a_1 < a_2 < \ldots < a_t$ taková, že:

- úředník číslo a_i je přímý nadřízený úředníka a_{i+1} pro $1 \leq i \leq t-1$,
- úředník a_t má na starosti styk s veřejností, a
- žádný z úředníků a_2, a_3, ..., a_{t-1} nevykonává úkon u.

Formát vstupu

Program načte vstupní data ze standardního vstupu. První řádek obsahuje přirozená čísla N a M, udávající počet úředníků a počet typů úkonů. Na následujících $N-1$ řádcích jsou popsáni úředníci kromě ministra. Na i-tém z těchto řádků se nachází dvě čísla n_i a u_i ($1 \leq n_i \leq i$, $1 \leq u_i \leq M$), kde n_i je číslo přímého nadřízeného úředníka číslo $i+1$ a u_i je číslo úkonu, který smí vykonávat.

Můžete předpokládat, že počet úkonů M je řádově menší než počet úředníků N.

Formát výstupu

Program vypíše na standardní výstup čísla úředníků, kteří nic nedělají, v libovolném pořadí, oddělená mezerami.

Příklad

Vstup:	*Výstup:*

`10 3`
`1 2`
`2 3`
`2 2`
`2 2`
`1 2`
`6 2`
`6 1`
`4 1`
`5 1`
	`2 3 7`

P-III-3 Grafový počítač v potrubí

V letošním ročníku olympiády se setkáváme se speciálním grafovým počítačem. Ve studijním textu uvedeném za zadáním této úlohy je popsáno, jak grafový počítač funguje a jak se programuje. Studijní text je identický s textem z domácího a krajského kola.

A právě takový počítač umožnil nový způsob komunikace: potrubní poštu. Taková potrubní pošta sestává z mnoha stanic. Některé dvojice stanic jsou propojeny potrubím, které lze použít k přepravě zpráv v obou směrech. Stanice jsou samozřejmě schopné zprávy předávat dál, takže zásilky obvykle putují do cílové stanice několika na sebe navazujícími rourami.

Potrubí bylo postaveno a ještě než došlo k vyřízení všech povolení, nahromadilo se mnoho zpráv, které je třeba doručit. A protože je to systém nový, rozhodli se poštmistři, že začnou posílat od těch nejkratších zpráv, aby zjistili, jestli se v potrubí nezasekávají.

Navíc se po dobu vyřizování formalit v potrubí usadily myši. Myši samozřejmě každé procházející psaní hned zhltnou, proto je potřeba poslat potrubím napřed kočku. Protože však kočka je mnohem těžší než psaní, je také nákladnější ji potrubím profouknout. Proto bylo rozhodnuto, že budou vyčištěny jen některé roury, a to tak, aby jejich celková délka byla co nejmenší a přitom bylo možno poslat psaní z libovolné stanice do libovolné jiné.

Soutěžní úlohy

a) *(3 body)* Napište funkci pro grafový počítač, která seřadí zprávy podle délky. Vstupem funkce bude pole celých čísel – délek zpráv. Úkolem je toto pole setřídit od nejmenšího po největší. Můžete při tom využít toho, že délky zpráv se vejdou do typu `Value` grafového počítače.

Řešení s časovou složitostí $\Theta(n \log n)$ může získat nejvýše 1 bod, pomalejší řešení nedostanou žádné body.

b) *(7 bodů)* Dostanete na vstupu popis potrubí jako souvislý ohodnocený graf (stanice jsou vrcholy, trubky jsou hrany a jejich váhy odpovídají délkám trubek). Vraťte podgraf obsahující právě ty hrany, které mají být vyčištěny. Jinými slovy podgraf, ve kterém vede mezi každou dvojicí vrcholů cesta a který má ze všech takových grafů nejmenší možný součet vah hran.

Pokud vám to pomůže, můžete předpokládat, že neexistuje žádná dvojice stejně dlouhých rour.

I u této podúlohy bude při hodnocení kladen důraz na to, zda je vaše řešení rychlejší než řešení, která se dají naprogramovat na klasickém počítači.

Studijní text

Grafový počítač

Běžné počítače počítají s čísly. Železniční inženýři v Tazmánii si jednoho dne všimli, že většina problémů, které potřebují řešit, se týká grafů. Proto během jedné polední přestávky vynalezli grafovou jednotku, která umí provádět všechny běžné operace s grafy, a to dokonce v konstantním čase. Sice zatím nevymysleli, jak ji sestrojit, ale i tak si můžeme v tomto ročníku olympiády vyzkoušet, jak se na takovém *grafovém počítači* programuje.

Nejdříve definujme, s čím grafový počítač pracuje.

Graf si můžeme představovat třeba jako body v rovině (těm budeme říkat *vrcholy* grafu), jejichž některé dvojice jsou spojeny hranou. Může to tedy třeba být mapa železniční sítě: vrcholy jsou zastávky, dvě zastávky jsou spojeny hranou, pokud mezi nimi vede přímá trať. Pokud se hrany kříží, předpokládáme, že se jedná o mimoúrovňová křížení.

Řečeno formálně, graf je dvojice (V, E) taková, že V je libovolná konečná množina (jejím prvkům se říká vrcholy) a E je množina neuspořádaných dvojic prvků z V (tedy hran).

Upřesněme ještě, že mezi dvěma různými vrcholy může vést maximálně jedna hrana a že nejsou povoleny hrany, jejichž oběma konci je tentýž vrchol.

Dále ke grafu můžeme přidat *ohodnocení*. Vrcholům a hranám může být přiřazeno nezáporné celé číslo. V případě hran může znamenat například délku kolejí, v případě vrcholů může popisovat mýtné, které se platí za průjezd. Někdy jím také můžeme značit různé vlastnosti: například u našeho železničního příkladu může být vrchol odpovídající stanici ohodnocen jedničkou, zatímco vrcholy v zastávkách dvojkou.

Reprezentace grafu

Grafový počítač ukládá grafy tak, že vrcholy jsou určeny přirozenými čísly od 1 do počtu vrcholů. Těmto číslům budeme říkat *identifikátory* (zkráceně *id*) vrcholů.

Hrany budeme vždy identifikovat pomocí čísel vrcholů, které hrana spojuje.

Každý vrchol a každá hrana mají své ohodnocení. To má buď hodnotu nezáporného celého čísla nebo speciální hodnotu `undef` (tzn. nedefinováno). Aby se

to nepletlo, budeme číslům na hranách říkat *váhy hran,* zatímco těm ve vrcholech *značky vrcholů.*

K programování grafového počítače použijeme běžný programovací jazyk, například Pascal nebo C, který rozšíříme o několik datových typů a funkcí. Zde je budeme ukazovat v syntaxi Pascalu, v C budou obdobné.

Datové typy

- Typ `Graph` – do tohoto typu se dá uložit jeden (celý, libovolně velký) graf. Mezi proměnnými a hodnotami tohoto typu funguje obvyklé přiřazování a porovnávání na rovnost.
- Typ `Value` popisuje ohodnocení vrcholu nebo hrany. Lze do něj ukládat nezáporná celá čísla a konstantu `undef`. Hodnoty tohoto typu různé od `undef` jsou kompatibilní s pascalským typem `Integer`, v případě jazyka C s typem `int`.

Operace se strukturou grafu

- Konstanta `EmptyG`. V této konstantě je uložen prázdný graf. To je takový, který nemá žádné vrcholy (tedy ani hrany).
- Funkce `AddV(G, z)` přidá do grafu G nový vrchol ohodnocený značkou z. Do přidaného vrcholu zatím nevedou žádné hrany. Nový vrchol bude zařazen jako poslední, tedy jeho *id* bude nejvyšší. Funkce vrací toto *id.*
- Procedura `DelV(G, id)` smaže vrchol s daným *id.* Zbývající vrcholy „srazí doleva“, aby nevznikla díra (tedy, z $id+1$ se stane *id*, z $id+2$ se stane $id+1$, atd.). Zároveň odstraní všechny hrany, které končily ve smazaném vrcholu.
- Procedura `AddE(G, x, y, w)` vytvoří hranu mezi vrcholy s *id* x a y, ohodnocenou vahou w. Hrana nesmí před voláním této procedury existovat.
- Procedura `DelE(G, x, y)` odstraní hranu mezi vrcholy x a y (nesmí být volána, pokud hrana neexistuje).
- Funkce `TestE(G, x, y)` zjistí, jestli mezi vrcholy x a y vede hrana.

Manipulace s ohodnocením

- Funkce `GetV(G, id)` vrací značku zadaného vrcholu.
- Procedura `SetV(G, id, z)` nastaví značku zadaného vrcholu.
- Procedura `SetAllV(G, z)` ji nastaví všem vrcholům grafu.
- Procedura `ReplaceV(G, zold, znew)` všem vrcholům, které měly značku *zold*, ji změní na *znew.*
- Obdobně fungují `GetE(G, x, y)`, `SetE(G, x, y, w)`, `SetAllE(G, w)` a `ReplaceE(G, wold, wnew)`. Pracují s vahami hran místo značek vrcholů. Pro identifikaci hrany se používají *id* vrcholů x a y, mezi kterými vede. Procedura `SetE` hranu založí, pokud ještě neexistuje.

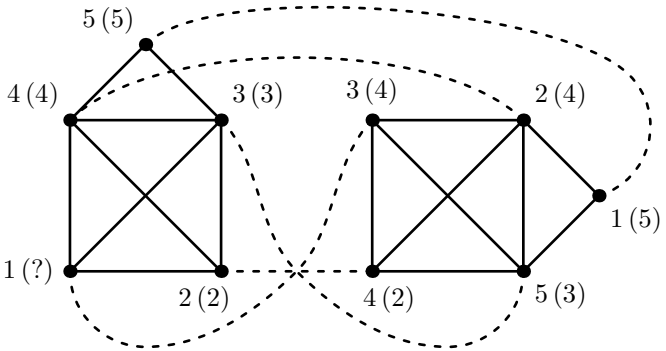
Statistické funkce

- Funkce `CountV(G)` odpoví, kolik vrcholů se nachází v grafu.
- Funkce `SumV(G)` vrací součet značek všech vrcholů, přičemž `undef` se počítá jako 0. Pokud graf nemá žádné vrcholy, vrací 0.
- Funkce `CountE(G)` a `SumE(G)` fungují obdobně pro hrany a jejich váhy.

Globální operace

- Funkce `Iso(G, H, veq, eeq)` zjistí, jestli jsou grafy G a H *isomorfní*. Isomorfismem myslíme, že lze jednomu z grafů přečíslovat vrcholy tak, aby se shodoval s druhým grafem. Dva grafy jsou shodné, pokud mají stejné množiny vrcholů i hran; navíc se jim musí shodovat značky vrcholů a váhy hran podle toho, jak určují parametry *veq* (pro vrcholy) a *eeq* (pro hrany). Tyto parametry mohou nabývat následujících hodnot:
  - `any` – libovolné dva vrcholy/hrany se rovnají (na ohodnocení se nehledí).
  - `value` – odpovídající si vrcholy/hrany musejí mít stejné ohodnocení. Hodnotu `undef` ale považujeme za „žolíka," který se rovná libovolné hodnotě.
  - `value_strict` – vrcholy/hrany musejí mít stejné ohodnocení, `undef` se rovná jen `undef`u.
  - `value_defined` – vrcholy/hrany musejí mít stejné ohodnocení, ale `undef` se nerovná ničemu, ani `undef`u.
  - `id` – vrcholy musejí mít stejná *id* (toto lze aplikovat jen na vrcholy, neboť hrany nemají *id*). Jinými slovy, zakazujeme přečíslovávat vrcholy, ale na jejich ohodnocení nehledíme.
  - `none` – žádné dva vrcholy/hrany nejsou identické. Ač to vypadá neužitečně, tuto možnost použijeme v dalších funkcích.

  Jak isomorfismus funguje, je vidět na následujícím obrázku:



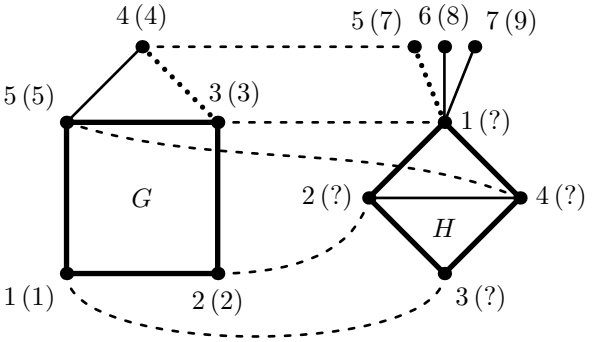
Čísla před závorkami jsou *id* vrcholů, v závorkách jejich značky (otazník značí `undef`). Všechny hrany mají váhu `undef`. Grafy jsou isomorfní

(čárkované čáry ukazují, který vrchol odpovídá kterému), pokud *veq* nastavíme na `value` nebo `any` a *eeq* na `any`, `value` nebo `value_strict`. V ostatních případech isomorfní nejsou.

- Funkce `Find(G, H, veq, eeq)` najde podgraf grafu G (tedy takový graf, který lze získat z G odstraněním některých vrcholů a hran) isomorfní s grafem H. Výsledkem funkce bude tento podgraf, přičemž vrcholy budou očíslované podle grafu H a ohodnocení vrcholů a hran bude pocházet z grafu G. Pokud hledaný podgraf neexistuje, funkce vrátí `EmptyG`. Parametry *veq* a *eeq* určují stejně jako u funkce `Iso`, jak se chová isomorfismus.

  Pokud existuje více isomorfních podgrafů, funkce `Find` nalezne nejlehčí z nich (takový, který má nejmenší součet vah hran, jak by ho spočítala funkce `SumE`). Pokud i tak existuje více řešení, `Find` vrátí libovolné z nich.
- Funkce `Common(G, H, veq, eeq)` najde největší společný podgraf grafů G a H. Přesněji, najde graf, který je isomorfní (podle *veq* a *eeq*) s některým podgrafem G i některým podgrafem H. Ze všech možných řešení si navíc vybere takové, které má největší možný počet vrcholů, a z takových pak to s největším počtem hran. Pokud i těch je více, vybere si libovolně.

  Výsledný graf bude mít *id* vrcholů ve stejném pořadí, jako je měl odpovídající podgraf v G (jen „sražená k sobě“). Ohodnocení vrcholů a hran bude také zděděno z grafu G.

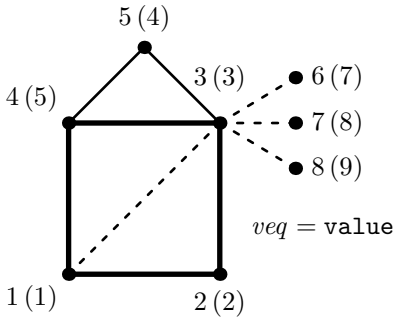


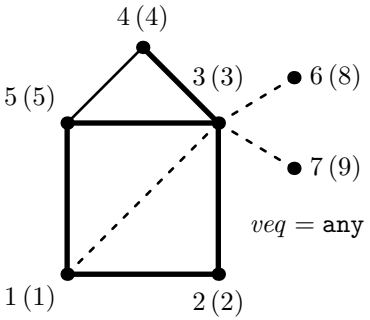
Dvojice grafů na předchozím obrázku má největší společný podgraf při *veq* = `value` obtažený tučně. Čárkovaně je naznačeno jedno z možných přiřazení vrcholů. Při *veq* = `any` přibude do společné části ještě vrchol 5 a tečkovaná hrana $\{3, 4\}$ nalevo, která může odpovídat kterékoliv z hran $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$ a $\{1, 7\}$ napravo.

- Funkce `Join(G, H, veq, eeq)` sloučí grafy G a H. Můžete si to představit tak, že je „slepí za jejich největší společný podgraf.“ Udělá to tak, že nejprve nalezne největší společný podgraf (tak jako ve funkci `Common`), pak k němu doplní zbývající vrcholy grafu G a nakonec vrcholy grafu H (*id* vrcholů výsledného grafu tedy budou v tomto pořadí). Hrany, váhy a

značky přitom zdědí z obou grafů, přičemž pokud se nějaký vrchol nebo hrana vyskytují v obou grafech, řídí se ohodnocením z grafu G.

Join grafů z předchozího obrázku vypadá následovně:





Tučně je vyznačena společná část (všimněte si rozdílů v *id* vrcholů), tenké nepřerušované hrany pocházejí z grafu G, čárkované hrany z grafu H. (Zde jsme nakreslili jeden z možných výsledků, ostatní se budou lišit tím, který vrchol v grafu H je ve společné části, případně otočením nebo překlopením čtyřúhelníku.)

Všechny operace předpokládají, že dostanou korektní vstup – není tedy například povoleno volat je s *id* neexistujícího vrcholu nebo upravovat grafovou proměnnou, do které jste ještě nepřiřadili, a podobně.

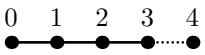
Všechny grafové operace trvají konstantní čas.

Abychom vám usnadnili ladění programů, vytvořili jsme simulátor grafového počítače. Najdete ho od září na webových stránkách olympiády.

Příklad 1: Tvorba cesty

Ukážeme, jak vytvořit *cestu* délky n. To je graf o $n+1$ vrcholech a n hranách, ve kterém je každý vrchol spojen hranou s následujícím. Zajisté bychom cestu mohli vytvářet postupně, například takto:

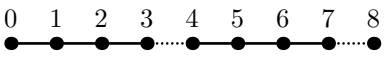
```
function cesta(n: Integer): Graph;
var
  i, posledni, novy: Integer;
  g: Graph;
begin
  g := EmptyG;
  posledni := AddV(g, 0);
  for i := 1 to n do begin
    novy := AddV(g, 0);
    AddE(g, posledni, novy, undef);
    posledni := novy;
  end;
  cesta := g;
end;
```



Začínáme s jediným vrcholem (má *id* 1) a pak n-krát přidáme nový vrchol a hranu do něj. (Vrcholům dáváme značky 0, hranám nedefinované váhy, což se bude hodit později.) Celý postup tedy trvá lineárně dlouho a vytvoří cestu začínající ve vrcholu s *id* 1 a končící vrcholem s *id* $n+1$. Nešlo by to rychleji?

Představme si na chvilku, že máme v g již část cesty, řekněme o k vrcholech. Pomocí `Join(g, g, none, none)` vytvoříme nový graf, který obsahuje dvě kopie této cesty (jednu s *id* $1, \ldots, k$, druhou s *id* $k+1, \ldots, 2k$). Stačí tedy přidat hranu z k do $k+1$ a máme cestu délky $2k$. Toho využijeme v následujícím (rekurzivním) řešení úlohy:

```
function cesta(n: Integer): Graph;
var
  vysledek: Graph;
  pulka: Integer;
begin
  if n = 0 then begin { Cesta délky 0 je snadná }
    vysledek := EmptyG;
    AddV(vysledek, 0);
  end else begin
    { Rekurzivně vytvoříme cestu poloviční délky }
    pulka := (n-1) div 2;
    vysledek := cesta(pulka);
    { Vyrobíme 2 kopie a spojíme je }
    vysledek := Join(vysledek, vysledek, none, none);
    AddE(vysledek, pulka+1, pulka+2, undef);
    { Když polovina nevyšla celočíselně, přidáme ještě hranu }
    if n mod 2 = 0 then begin
      AddV(vysledek, 0);
      AddE(vysledek, n, n+1, undef);
    end
  end;
  cesta := vysledek;
end;
```

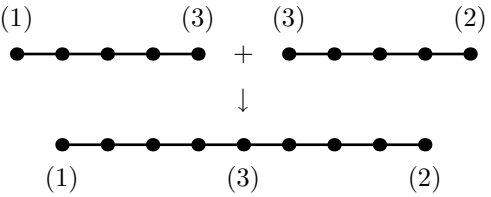


Při každém rekurzivním volání se n zmenší alespoň dvakrát, časová složitost tohoto řešení je tedy $\mathcal{O}(\log n)$.

Ukážeme ještě jedno řešení, tentokrát založené na spojování cest za vrchol. Budeme vytvářet cesty, jejichž počáteční vrchol bude mít značku 1, koncový vrchol značku 2 a všechny ostatní vrcholy `undef`. Když chceme dvě cesty spojit do jedné, přeznačíme koncový vrchol první a počáteční vrchol druhé na 3 a zavoláme `Join` s *veq* = `value_defined`. Tím způsobíme, že se vrcholy označené trojkou ztotožní a vznikne cesta dvojnásobné délky (kdybychom místo `value_defined` použili `value`, ztotožnily by se i vnitřní vrcholy cest, což nechceme). Pak ještě odstraníme pomocnou značku 3 a přepíšeme ji na `undef`. Program tentokrát pro jednoduchost napíšeme pouze pro $n = 2^k$:

```
function cesta(n: Integer): Graph;
var
  g, t1, t2: Graph;
```

```
begin
  if n = 1 then begin
    g := EmptyG;
    AddV(g, 1);
    AddV(g, 2);
    AddE(g, 1, 2, undef);
  end else begin
    t1 := cesta(n div 2);
    t2 := t1;
    ReplaceV(t1, 2, 3);
    ReplaceV(t2, 1, 3);
    g := Join(t1, t2, value_defined, any);
    ReplaceV(g, 3, undef);
  end;
  cesta := g;
end;
```



Časová složitost tohoto řešení je opět logaritmická.

Příklad 2: Obchodní cestující

Všichni známe vykutálené obchodníky. Prodávají kdoví co a nejraději by, kdyby je po prodeji již kupující nikdy nenašel.

Představme si takového obchodníka. Nyní se nachází ve městě (vrcholu) číslo 1. Chce projet celou zemi (graf) po silnicích (hranách) tak, aby navštívil každé město právě jednou a pak se vrátil domů. Navíc při tom chce najezdit co nejméně, takže by celková váha použitých hran měla být co možná nejmenší.

Na obvyklém počítači tento problém neumíme vyřešit v polynomiálním čase, ale pokud máme k dispozici grafový počítač, půjde to velice efektivně.

Stačí totiž vyrobit cyklus z n hran a funkcí `Find` nalézt jeho nejlehčí výskyt v grafu popisujícím mapu. Cyklus vytvoříme tak, že podle předchozího příkladu vytvoříme cestu o $n-1$ hranách očíslovanou $1, \ldots, n$ a poté spojíme hranou její první vrchol s posledním. To bude trvat logaritmicky dlouho a funkce `Find` pak konstantně. I program bude jednoduchý:

```
function cestujici(mapa: Graph): Graph;
var trasa: Graph;
begin
  trasa := cesta(CountV(mapa)-1);
  AddE(trasa, 1, CountV(mapa), undef);
  cestujici := Find(mapa, trasa, any, any);
end;
```